Primer parcial MA2112. Tipo A

Abril-Julio 2008.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

Resolución

Pregunta 1.

Sea $f(x,y) = \begin{cases} xcos(y) + ycos(x) & si \quad y \geq x^2 \\ 0 & si \quad y < x^2 \end{cases}$

a.)¿Es f continua en $(0,0)$?

Lo primero que debemos de hacer es graficar función que delimita las regiones de la función a trozos tal cual como se muestra en la Figura 1.

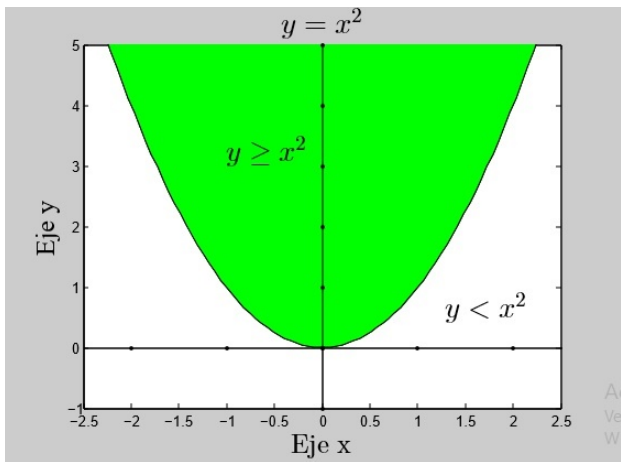

Figura 1: regiones delimitadas por $y = x^2$

Podemos añadir una modificación este gráfico, ya que el área verde representa la región donde la imagen de $f(x,y) = xcos(y) + ycos(x)$ y la región sin color es cuando $f(x,y) = 0$.

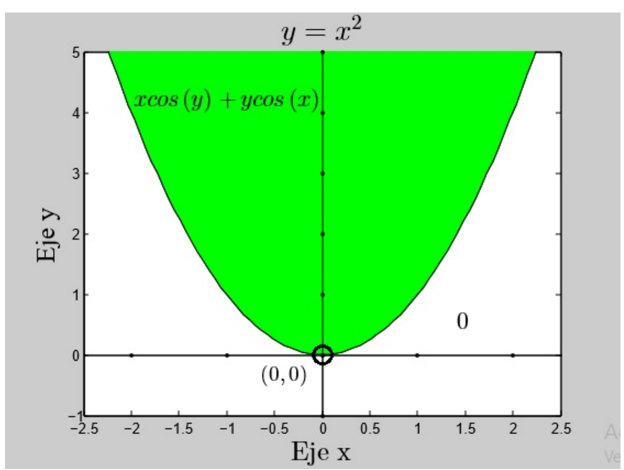

Figura 2: Imágenes de la función a trozos

En la Figura 2 observamos que el punto $(0,0)$ es un punto forntera y hay que evaluar todas las formas posibles de acercarse al origen. Plantearemos 2 posibilidades: nos aproximaremos por una recta $y = mx$ con $m = 0$ y con $m \neq 0$.

Si $m = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xcos(y) + ycos(x) = 0$

Ahora, si $m \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xcos(y) + ycos(x) = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \end{cases}$

Ya que los límites laterales existen y si nos aproximamos por diversos métodos el límite vale lo mismo, tenemos un posible valor del límite. Ahora debemos de hallar, mediante la definición formal del límite un épsilon mayor que 0 de modo que haya un delta en función de épsilon.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / 0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta / |xcos(y) + ycos(x)| < \varepsilon$$

Desarrollamos la norma euclideana y luego aplicamos propiedades de desigualdades con valor absoluto para obtener:

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ y } \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Sabemos que la función coseno está acotada entre $[-1,1]$ así que procedemos a acotarla de modo que nos quede la siguiente expresión:

$$-1 \leq cos(y) \leq 1 \Rightarrow -x \leq xcos(y) \leq x \Rightarrow |xcos(y)| \leq x \text{ y } |ycos(x)| \leq y$$

$$|xcos(y) + ycos(x)| \leq |xcos(y)| + |ycos(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |xcos(y)| + |ycos(x)| < |x| + |y| < \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} < \delta + \delta \leq \varepsilon \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para demostrar que el límite existe y vale 0

Ahora, sabemos que $f(0,0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = f(0,0) = 0 \therefore f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

b.)Diga si existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$. De ser así, calculelas.

Debemos de aplicar la definición de derivadas parcial para calcular su valor:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to0} \dfrac{(0+h)\,cos(0) + (0)\,cos(h+0) - 0}{h} & = & 1 \\ \lim\limits_{h\to0} \quad 0 & = & 0 \end{cases}$$

Ya que $1 \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \nexists$, calculemos $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la misma forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(0)\,cos\,(0+h)+(0+h)\,cos\,(0)-0}{h} & = & 1\\ \lim\limits_{h\to 0} \quad 0 & = & 0\end{cases}$$

$1\neq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\;\nexists$. Ya que no existen las derivadas parciales en $(0,0)$, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Pregunta 2. Sean $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $h=f(g)$ funciones diferenciables de modo que $g(-1,0,0)=(2,1):$

$$Dg(-1,0,0)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{ y } Dh(-1,0,0)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

Hallar la ecuación del plano tangente a f en $(2,1)$, sabiendo que $(-1,0,0)$ está en dicho plano.

Aplicamos la regla de la cadena y empleamos el jacobiano de las tres funciones para hallar f_x y f_y.

$$Dh|_{(-1,0,0)}=Df|_{(2,1)}\,Dg|_{(-1,0,0)}\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & f_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2=2f_x+f_y\\ -1=-f_x+f_y\\ 2=2f_x+f_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-2f_x=f_y\\ -1+f_x=f_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-2f_x=-1+f_x\Rightarrow f_x=1\\ -1+f_x=f_y\Rightarrow f_y=0\end{cases}$$

De modo que: $\nabla f=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Planteamos la ecuación del plano tangente y de allí obtendremos $f(0,0)$ ya que sabemos que el punto $(-1,0,0)$ pertenece al plano.

$$z=f(2,1)+\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}\right\rangle\Rightarrow z=f(2,1)+x-2\;\Rightarrow\;0=f(2,1)-3\Rightarrow f(2,1)=3$$

$\therefore$ la ecuación del plano tangente a f en el punto $(2,1)$ es: $z=x+1$

Pregunta 3. La superficie de ecuación

$$xz\cos(y)+x^2-y^2+z^3=1$$

pasa por el punto $(2,0,-1)$ y alrededor de este punto define implícitamente a la función $z=f(x,y)$. Si f es de clase C^2, calcular $\nabla f(2,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,0)$.

Lo primero que debemos de hacer es definir la función $F(x,y,z)\equiv xz\cos(y)+x^2-y^2+z^3=1$ y procedemos a hallar las derivadas parciales de f. En el enunciado nos dicen que la ecuación representaba a una función $f(x,y)$ por el punto $(2,0,-1)$, lo cual quiere decir que $f(2,0)=-1=z$.

$$\text{Sabemos que: }\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{z\cos(y)+2x}{x\cos(y)+3z^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=-\left(\frac{-1+4}{2+3}\right)=-\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-xzsin\left(y\right) - 2y}{x\cos\left(y\right) + 3z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(2,0\right) = 0$$

$\therefore \nabla f\left(2,0\right) = \left(\ -\frac{3}{5} \ \ , \ \ 0 \ \right).$

Calculemos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(2,0\right)$. Para ello, derivamos parcialmente (respecto a y) la primera derivada parcial de f respecto a x.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\left[\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\left(y\right) - \sin\left(y\right)z\right)\left(x\cos\left(y\right) + 3z^2\right) - \left(z\cos\left(y\right) + 2x\right)\left(-sin\left(y\right)x + 6z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(x\cos\left(y\right) + 3z^2\right)^2}\right]$$

Es conocido que $z = f\left(x,y\right)$, por lo cual la derivada parcial de z respecto a y ya la hemos calculado, evaluamos en $\left(2,0\right)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(2,0\right) = -\left[\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(2,0\right)cos\left(0\right) - sin\left(0\right)\left(-1\right)\right)\left(5\right) - \left(3\right)\left(-sin\left(0\right)\left(2\right) + 6\left(-1\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(2,0\right)\right)}{\left(\left(2\right)cos\left(0\right) + 3\left(-1\right)^2\right)^2}\right]$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(2,0\right) = 0.$

Pregunta 4. Hallar y clasificar los puntos críticos de:

$$f\left(x,y\right) = x^2y - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{y^4}{4} - 1$$

Calculamos ∇f y hallamos dónde se hace $\overrightarrow{0}$

$$\nabla f = \left(\begin{array}{l} 2xy - 2x^3 + 4x \\ x^2 + y^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\left(y - x^2 + 2\right) = 0 \\ x^2 = -y^3 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y hallamos las dos posibles soluciones de la primera ecuación, para luego sustituir en la segund ecuación.

Si $x = 0 \Rightarrow x^2 = -y^3 \Rightarrow y = 0$. El primer punto $P1 = \left(0,0\right)$. Hagamos lo mismo con la otra posible solución.
Si $y - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y + 2 = x^2 \Rightarrow y + y^3 + 2 = 0 \Rightarrow \left(y+1\right)\left(y^2 - y + 2\right)$.

De esta expresión obtenemos que $y = -1 \Rightarrow x^2 = \pm 1 \Rightarrow P2\left(1,-1\right)$ y $P3\left(-1,-1\right)$

Calculemos las segundas derivadas parciales de la función para aplicar el criterio del Hessiano o la segunda derivada

$$f_{xx} = 2y - 6x^2 + 4, f_{yy} = 3y^2, f_{xy} = f_{yx} = 2x$$

$$H = \begin{vmatrix} 2y - 6x^2 + 4 & 2x \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}$$

Evaluemos el Hessiano en nuestros puntos críticos:

$$H(\pm 1, -1) = \begin{vmatrix} -4 & \pm 2 \\ \pm 2 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0 \text{ Entonces } P2 \text{ y } P3 \text{ son puntos de ensilladura.}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ El criterio falla y hay que aplicar la definición de extremos.}$$

$$f(0,0) = -1 \Rightarrow f(x,y) - f(0,0) = x^2 y - \frac{x^4}{2} + 2x^2 + \frac{y^4}{4}.$$

Igualamos a 0 la expresión: $x^2\left(y + 2 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{y^4}{4}$. Donde $x^2 \geq 0$ y $\frac{y^4}{4} \geq 0$.
$\Rightarrow y + 2 - \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{x^2}{2} - 2$. Evaluamos en $(0,0) \Rightarrow 0 \geq -2$ y podemos concluir que $P1$ es un mínimo local. Esto se puede ver mejor en la Figura 3

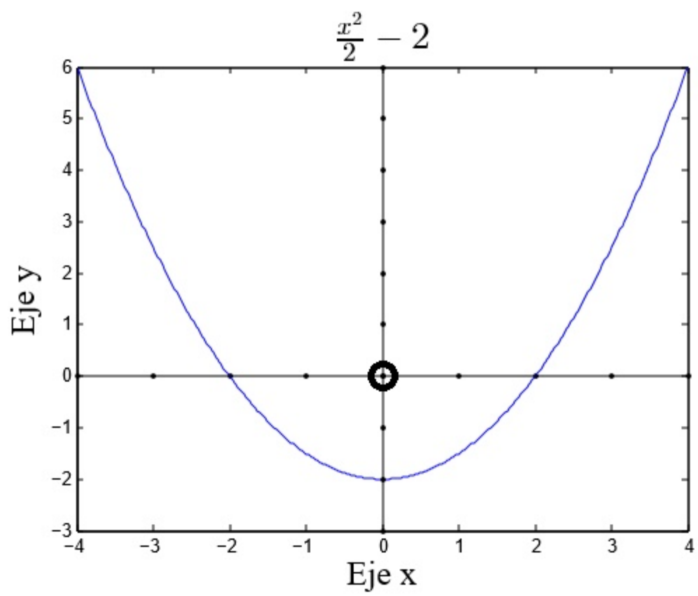

Figura 3: $P1$ en $y = \frac{x^2}{2} - 2$

Notificar en caso encontrar algún error.

Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve

Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.